Analyse op variëteiten

Oefententamen. Alle antwoorden dienen te worden gemotiveerd: alleen "ja", "nee" of "42" volstaat niet en levert geen punten op. Het tentamen bestaat uit zes opgaven. De puntenverdeling staat vermeld op de achterzijde. Het gebruik van rekenmachines, boeken of aantekeningen is niet toegestaan.

Opgave 1. Gegeven is de verzameling

$$M = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \, : \, x_1^2 - x_2^2 = 1 \text{ en } x_3^2 - x_4^2 = 1\}.$$

(a) Bewijs dat M een 2-dimensionale deelvariëteit van $\mathbb{R}^4$ is.

(b) Bereken de raakruimte aan M in het punt $(1, 0, -1, 0)$.

Opgave 2. Gegeven zijn de volgende 3-vorm en gladde afbeelding op $\mathbb{R}^3$:

$$\omega = yz \, dx \wedge dy \wedge dz \qquad \text{en} \qquad \phi(u, v, w) = (u^2 - v^2, 2uv, w).$$

Bereken de terugtrekking $\phi^*(\omega)$.

Opgave 3. Gegeven is de volgende 2-vorm op $\mathbb{R}^3$:

$$\omega = A \, dy \wedge dz + B \, dz \wedge dx + C \, dx \wedge dy$$

waarin de coëfficiënten A, B en C gladde functies op $\mathbb{R}^3$ zijn. Bewijs dat ω exact is dan en slechts dan als

$$\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z} = 0.$$

Opgave 4. Bewijs dat op enkelvoudig samenhangende verzamelingen $M \subset \mathbb{R}^n$ alle gesloten 1-vormen exact zijn. Aanwijzing: je mag zonder bewijs gebruiken dat een 1-vorm ω exact is dan en slechts dan als $\int_c \omega = 0$ voor elke gesloten kromme c.

Zie ommezijde!

Opgave 5. Zij $\langle \cdot, \cdot \rangle$ een inproduct op een vectorruimte V. Bewijs dat

$$\Phi : V \to V^*, \qquad X \mapsto X^\flat = \langle X, - \rangle$$

een isomorfisme is.

Opgave 6.

(a) Toon aan dat het tensorproduct van twee covariante tensoren *niet* commutatief is.

(b) Gegeven zijn de 1-vormen σ en τ. Druk het dakjes-product $\sigma \wedge \tau$ uit in termen van tensorproducten.

Normering. Voor dit tentamen zijn in totaal 36 punten te behalen. Als p het aantal punten is, dan wordt het tentamencijfer berekend met de formule

$$C = 1 + \frac{p}{4}.$$

Voor de vraagstukken kunnen de volgende punten worden behaald:

	Opg. 1	Opg. 2	Opg. 3	Opg. 4	Opg. 5	Opg. 6
(a)	4	4	6	6	6	3
(b)	4					3